



MATEMÁTICAS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Lunes 5 de noviembre de 2007 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

1 hora 30 minutos

0	0							
---	---	--	--	--	--	--	--	--

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

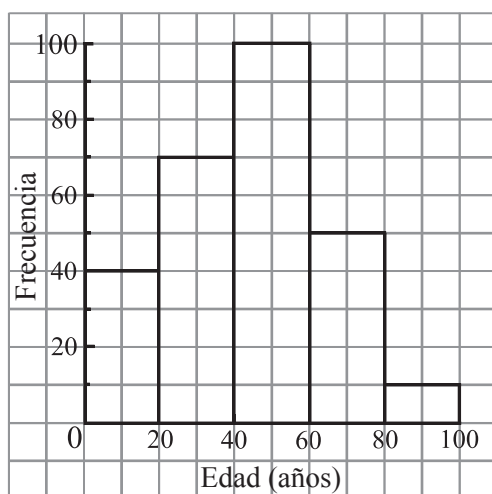
- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 6]

El histograma que aparece a continuación representa las edades de 270 personas de un pueblo dado.



(a) Utilice el histograma para completar la siguiente tabla.

[2 puntos]

Intervalo de edades	Frecuencia	Valor central del intervalo
$0 \leq \text{edad} < 20$	40	10
$20 \leq \text{edad} < 40$		
$40 \leq \text{edad} < 60$		
$60 \leq \text{edad} < 80$		
$80 \leq \text{edad} \leq 100$		

(b) A partir de lo anterior, calcule una estimación de la edad media.

[4 puntos]

.....

.....

.....

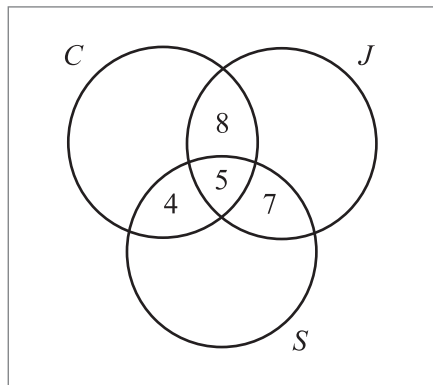
.....

.....

.....

2. [Puntuación máxima: 6]

El diagrama de Venn que hay a continuación muestra información acerca de 120 estudiantes de un colegio dado. De ellos, 40 estudian chino (C), 35 estudian japonés (J), y 30 estudian español (S).



Se elige al azar a un estudiante del grupo. Halle la probabilidad de que el estudiante

- (a) estudie exactamente dos de estos idiomas; [1 punto]
- (b) estudie sólo japonés; [2 puntos]
- (c) no estudie ninguno de estos idiomas. [3 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

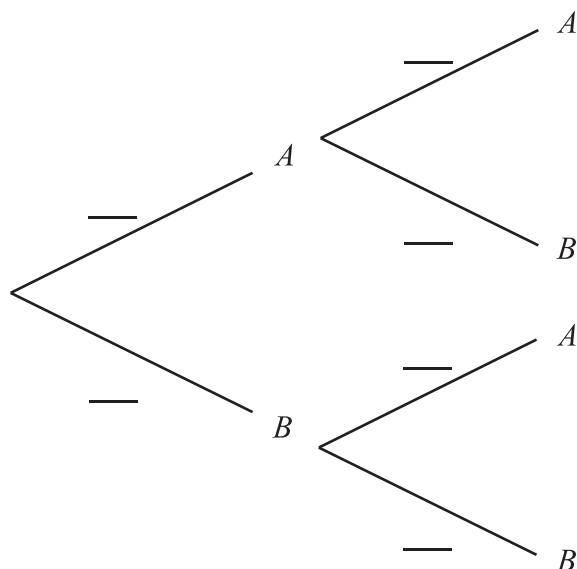
.....

3. [Puntuación máxima: 6]

Una bolsa contiene cuatro manzanas (A) y seis plátanos (B). Se saca una fruta de la bolsa y se come. A continuación, se saca una segunda fruta de la bolsa y se come.

- (a) Complete el diagrama de árbol que aparece a continuación, escribiendo las correspondientes probabilidades en los espacios disponibles para tal fin.

[3 puntos]



- (b) Halle la probabilidad de que se haya comido una fruta de cada tipo.

[3 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. [Puntuación máxima: 6]

Los cuatro primeros términos de una progresión son 18, 54, 162 y 486.

- (a) Utilice los cuatro términos para comprobar que se trata de una progresión geométrica.

[2 puntos]

- (b) (i) Halle una expresión para calcular el término n -ésimo de esta progresión geométrica.

- (ii) Si el término n -ésimo de la progresión es igual a 1 062 882 , halle el valor de n .

[4 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. [Puntuación máxima: 6]

(a) Escriba los tres primeros términos de la progresión $u_n = 3n$, para $n \geq 1$. [1 punto]

(b) Halle

(i) $\sum_{n=1}^{20} 3n$;

(ii) $\sum_{n=21}^{100} 3n$.

[5 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. [Puntuación máxima: 6]

Sea $f(x) = \log_a x$, $x > 0$.

(a) Escriba el valor de

(i) $f(a)$;

(ii) $f(1)$;

(iii) $f(a^4)$.

[3 puntos]

.....

.....

.....

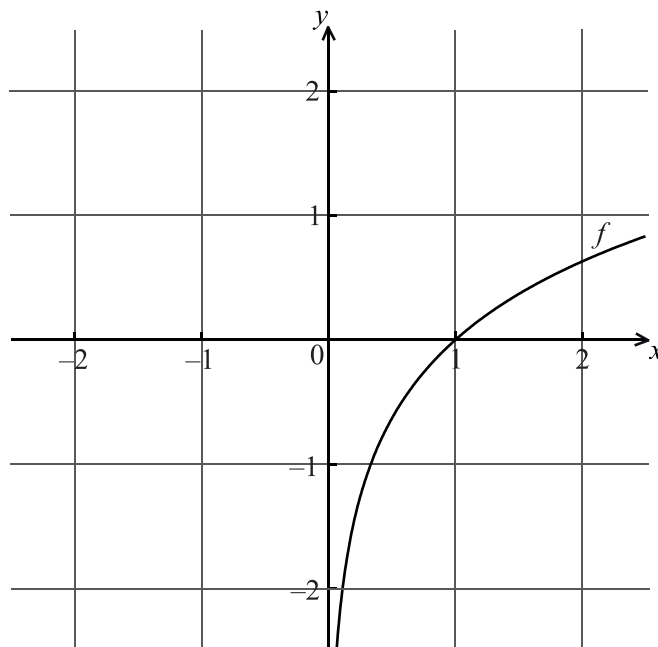
.....

.....

.....

.....

(b) El diagrama que aparece a continuación muestra una parte de la gráfica de f .



Sobre el diagrama anterior dibuje aproximadamente la gráfica de f^{-1} .

[3 puntos]

8. [Puntuación máxima: 6]

Considere la función $f(x) = 4x^3 + 2x$. Halle la ecuación de la recta normal a la curva de f en el punto para el cual $x = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



9. [Puntuación máxima: 6]

Derive cada una de las siguientes funciones con respecto a x .

(a) $y = \sin 3x$ [1 punto]

(b) $y = x \operatorname{tg} x$ [2 puntos]

(c) $y = \frac{\ln x}{x}$ [3 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

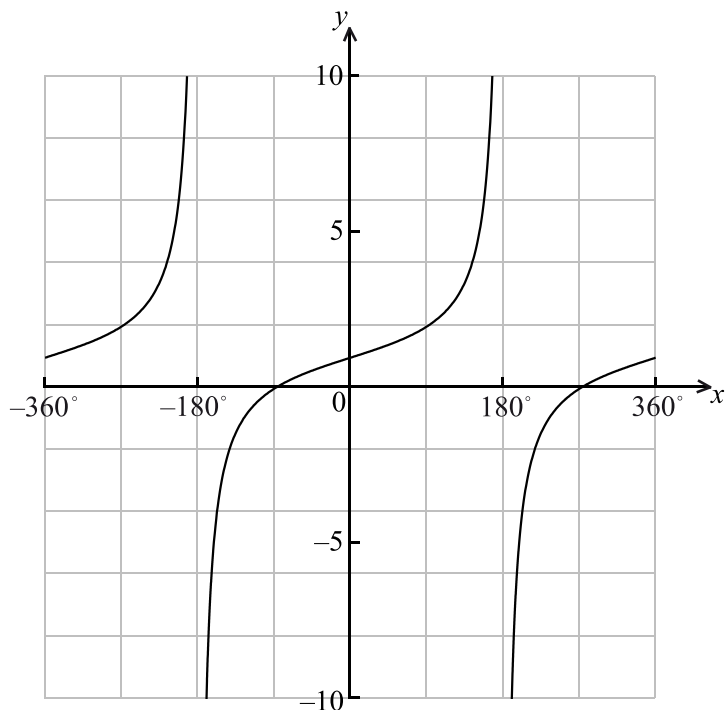
.....

.....

.....

10. [Puntuación máxima: 6]

El diagrama que aparece a continuación muestra una parte de la gráfica de $f(x) = 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, para $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$.



(a) Sobre el diagrama anterior, dibuje con precisión las asíntotas. [2 puntos]

(b) Escriba

(i) el periodo de la función;

(ii) el valor de $f(90^\circ)$. [2 puntos]

(c) Resuelva $f(x) = 0$ para $-360^\circ \leq x \leq 360^\circ$. [2 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

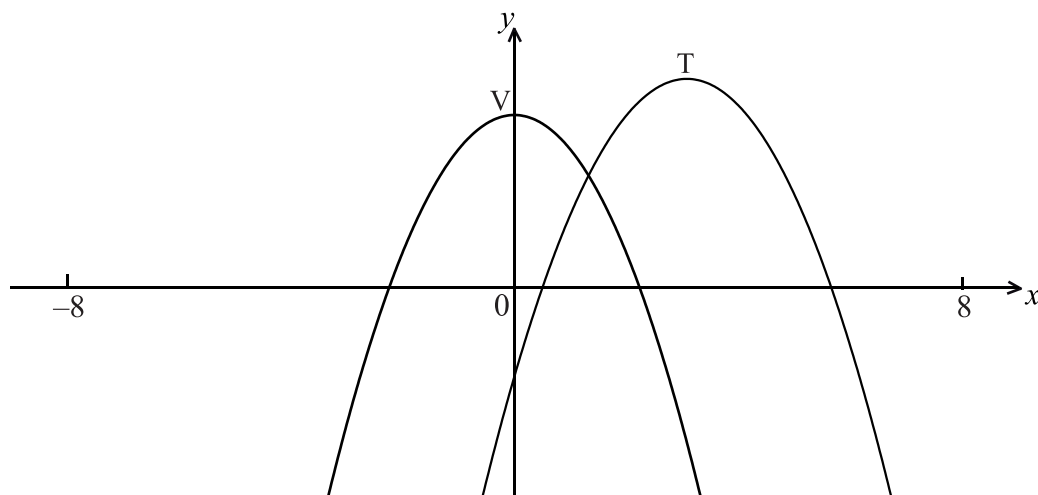
.....

.....

11. [Puntuación máxima: 6]

El siguiente diagrama muestra una parte de la gráfica de $f(x) = 5 - x^2$, cuyo vértice es $V(0, 5)$.

Su imagen $y = g(x)$ tras una traslación por medio del vector $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ tiene por vértice $T(3, 6)$.



(a) Escriba el valor de

(i) h ;

(ii) k .

[2 puntos]

(b) Escriba una expresión para $g(x)$.

[2 puntos]

(c) Sobre el diagrama anterior, dibuje aproximadamente la gráfica de $y = g(-x)$.

[2 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12. [Puntuación máxima: 6]

Una variable aleatoria discreta X está caracterizada por la distribución de probabilidad que se muestra en la siguiente tabla.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,1	a	0,3	b

(a) Halle el valor de $a + b$. [2 puntos]

(b) Sabiendo que $E(X) = 1,5$, halle el valor de a y de b . [4 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

13. [Puntuación máxima: 6]

(a) Desarrolle $\left(e + \frac{1}{e}\right)^4$ en función de e . [4 puntos]

(b) Exprese $\left(e + \frac{1}{e}\right)^4 + \left(e - \frac{1}{e}\right)^4$ como la suma de tres términos. [2 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

14. [Puntuación máxima: 6]

El área A (km^2) afectada por un incendio forestal en el instante t horas viene dada por la expresión $A = A_0 e^{kt}$. Cuando $t = 5$, el área afectada es de 1 km^2 y la razón de cambio del área es igual a $0,2 \text{ km}^2 \text{ h}^{-1}$.

(a) Compruebe que $k = 0,2$. [4 puntos]

(b) Sabiendo que $A_0 = \frac{1}{e}$, halle el valor de t para el cual hay afectada un área de 100 km^2 . [2 puntos]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

15. [Puntuación máxima: 6]

Sobre los ejes que aparecen a continuación, dibuje aproximadamente una curva $y = f(x)$ que satisfaga las siguientes condiciones.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$-2 \leq x < 0$		negativa	positiva
0	-1	0	positiva
$0 < x < 1$		positiva	positiva
1	2	positiva	0
$1 < x \leq 2$		positiva	negativa

